

УДК 517.977

**ОБ ОДНОЙ СПЕЦИФИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

К.Б.МАНСИМОВ^{*,}, Ш.М.РАСУЛОВА^{**}**
Бакинский Государственный Университет^{}*
*Институт Кибернетики НАН Азербайджана^{**}*
mansimov@front.ru

Рассматривается одна специфическая задача оптимального управления, занимающая промежуточное положение между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, необходимое условие оптимальности, первая и вторая вариации функционала, уравнение Эйлера.

Как отмечено, например, в работе [1, с. 68] в современной теории оптимального управления можно выделить два направления. Первое охватывает объекты с сосредоточенными параметрами, а второе направление – объекты с распределенными параметрами. В работе же [1] А.И.Москаленко рассмотрел задачу, которая занимает некоторое промежуточное положение между этими направлениями. Как отмечено в [1] она тесно связано с задачами с сосредоточенными параметрами, поскольку уравнения, описывающие процесс, являются по существу обыкновенными дифференциальными уравнениями, зависящими от параметра. С другой стороны, они могут быть интерпретированы как задачи для уравнений в частных производных с управлением на границе.

В работах [1, 2] А.И. Москаленко подробно изучал подобные задачи и, в частности, получил необходимые условия оптимальности первого порядка, типа принципа максимума Л.С. Понтрягина [3- 5].

Предлагаемая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности второго порядка в одной задаче из [1].

Постановка задачи. Предположим, что управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = f(t, x, z(t, x), u(t)), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad x \in X = [x_0, x_1], \quad (2.1)$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x, y(x), v(x)), \quad x \in X, \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.2)$$

Здесь $f(t, \tau, z, u)$, $g(x, y, v)$ – заданные n -мерные вектор-функции непрерывные, соответственно, в $T \times X \times R^n \times R^r$, $X \times R^n \times R^q$ вместе с частными производными по (z, u) и (y, v) , соответственно, до второго порядка включительно, $u(t)$ – r -мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U , $v(x)$ – q -мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества V , т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ v(x) &\in V \subset R^q, \quad x \in X = [x_0, x_1]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пару $(u(t), v(x))$ назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(x), z(t, x), y(x))$ – допустимым процессом.

Через D обозначим множество всех допустимых процессов.

Поставим задачу оптимального управления следующим образом: на множестве D элементов $(u(t), v(x), z(t, x), y(x))$ найти такой элемент, который давал бы наименьшее значение функционалу

$$J(u, v) = \varphi_1(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} \varphi_2(x, z(t_1, x)) dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} F(t, x, z(t, x), u(t)) dx dt. \quad (2.4)$$

Здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x, z)$, $F(t, x, z, u)$ – заданные скалярные функции непрерывные в R^n , $[x_0, x_1] \times R^n$, $[t_0, t_1] \times [x_0, x_1] \times R^n \times R^r$ вместе с частными производными по y , z , (z, u) , соответственно, до второго порядка включительно.

Вычисление вариаций функционала. Считая $(u(t), v(x), z(t, x), y(x))$ – заданным допустимым процессом через

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon(t) &= \varepsilon \delta u(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \Delta v_\varepsilon(x) &= \varepsilon \delta v(x), \quad x \in X = [x_0, x_1] \end{aligned} \quad (3.1)$$

определим специальное приращение управления $(u(t), v(x))$.

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)$, $\delta v(x)$ – произвольные, r и q -мерные кусочно-непрерывные вектор-функции со значениями из R^r и R^q , соответственно.

Пару $(\delta u(t), \delta v(x))$ назовем допустимой вариацией управления $(u(t), v(x))$.

Пусть $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(x))$ специальное приращение состояния $(z(t, x), y(x))$ отвечающее специальному приращению $(\Delta u_\varepsilon(t), \Delta v(x))$ управления $(u(t), v(x))$.

Через $(\delta z(t, x), \delta y(x))$ обозначим решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta z(t, x)) = f_z(t, x, z(t, x), u(t))\delta z(t, x) + f_u(t, x, z(t, x), u(t))\delta u(t), \quad (3.2)$$

$$\delta z(t_0, x) = \delta y(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$\delta \dot{y}(x) = g_z(x, y(x), v(x))\delta y(x) + g_v(x, y(x), v(x))\delta v(x), \quad \delta y(x_0) = 0. \quad (3.3)$$

Систему уравнений (3.2)-(3.3) назовем уравнением в вариациях в задаче (2.1)-(2.4), а пару $(\delta z(t, x), \delta y(x))$ – допустимой вариацией состояния.

Используя (3.1), (3.2) по схеме аналогичной, например, схеме из [4, 5] доказывающейся

Лемма 3.1. Для специального приращения $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(x))$ состояния $(z(t, x), y(x))$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} \Delta z_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon \delta z(t, x) + o_1(\varepsilon; t, x), \\ \Delta y_\varepsilon(x) &= \varepsilon \delta y(x) + o_2(\varepsilon; x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$H(t, x, z, u, \psi) = \psi' f(t, x, z, u) - F(t, x, z, u),$$

$$M(x, y, v, q) = q' g(x, y, v),$$

$$H_z(t, x) \equiv H_z(t, x, z(t, x), u(t), \psi(t, x)),$$

$$H_u(t, x) \equiv H_u(t, x, z(t, x), u(t), \psi(t, x)),$$

$$M_y(x) \equiv M_y(x, y(x), v(x), q(x)),$$

$$M_v(x) \equiv M_v(x, y(x), v(x), q(x)).$$

Здесь $\psi(t, x)$ и $q(x)$ n -мерные векторы сопряженных переменных, являющихся решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial H(t, x)}{\partial z}, \quad (3.4)$$

$$\psi(t_1, x) = -\frac{\partial \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$\dot{q}(x) = -M_y(x) - \psi(t_0, x), \quad (3.6)$$

$$q(x_1) = -\frac{\partial \varphi_1(y(x_1))}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Используя формулу Тейлора, специальное приращение критерия качества (2.4), записывается в виде

$$\begin{aligned} & S(u + \varepsilon \delta u, v + \varepsilon \delta v) - S(u, v) = \\ & = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1'(y(x_1))}{\partial y} \delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi_2'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \delta z(t_1, x) dx + \right. \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(t, x, z(t, x), u(t))}{\partial z} \delta z(t, x) + \frac{\partial F(t, x, z(t, x), u(t))}{\partial u} \delta u(t) \right] dx dt \left. + \right. \quad (3.8) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\delta y'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx + \right. \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 F(t, x, z(t, x), u(t))}{\partial z^2} \delta z(t, x) + 2 \delta u'(t) \frac{\partial^2 F(t, x, z(t, x), u(t))}{\partial u \partial z} \right. \\ & \left. \left. \times \delta z(t, x) + \delta u'(t) \frac{\partial^2 F(t, x, z(t, x), u(t))}{\partial u^2} \delta u(t) \right] dx dt \right] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Далее, учитывая введенные обозначения и того, что вектор-функции $\psi(t, x)$ и $q(x)$ являются решениями сопряженной системы (3.4)-(3.5), (3.6)-(3.7), разложение (3.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & S(u + \varepsilon \delta u, v + \varepsilon \delta v) - S(u, v) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H_u'(t, x) \delta u(t) dt dx - \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} M_v'(x) \delta v(x) dx + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta y'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx - \right. \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) + 2 \delta u'(t) H_{uz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta u'(t) H_{uu}(t, x) \delta u(t) \right] dx dt - \\ & \left. - \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y'(x) M_{yy}(x) \delta y(x) + 2 \delta v'(x) M_{vy}(x) \delta y(x) + \delta v'(x) M_{vv}(x) \delta v(x) \right] dx \right\} + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Отсюда в силу определения вариаций, в классическом смысле, функционала (см. напр. [4-6]) получаем следующие выражения для первой и второй вариации функционала качества

$$\delta^1 S(u, v; \delta u, \delta v) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x) \delta u(t) dx dt - \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x) \delta v(x) dx, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 S(u, v; \delta u, \delta v) &= \delta y'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \delta y(x_1) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) + \\ &+ 2 \delta u'(t) H_{uz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta u'(t) H_{uu}(t, x) \delta u(t)] dx dt - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} [\delta y'(x) M_{yy}(x) \delta y(x) + 2 \delta v'(x) M_{vy}(x) \delta y(x) + \delta v'(x) M_{vv}(x) \delta v(x)] dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Как известно (см. напр. [4-6]) в классической задаче вариационного исчисления на минимум в оптимальной точке первая вариация минимизируемого функционала равна нулю, а вторая – неотрицательна. Исходя из этого утверждения, в силу открытости областей управления U , V из (3.9), (3.10) получаем, что вдоль оптимального в задаче (2.1)-(2.4) процесса $(u(t), v(x), z(t, x), y(x))$ для всех $(\delta u(t), \delta v(x))$

$$\delta^1 S(u, v; \delta u, \delta v) = 0, \quad (4.1)$$

$$\delta^2 S(u, v; \delta u, \delta v) \geq 0. \quad (4.2)$$

Эти неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, соответственно, позволяют получить необходимые условия оптимальности, выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.4).

Используя произвольность $\delta u(t)$ и $\delta v(x)$ из (4.1) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x) \delta u(t) dx dt &= 0 \quad \text{для всех } \delta u(t) \in R^r, t \in T, \\ \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x) \delta v(x) dx &= 0 \quad \text{для всех } \delta v(x) \in R^v, x \in X. \end{aligned}$$

При помощи этих соотношений следуя, например, схеме работ [4, 7, 8], доказывается утверждение

Теорема 4.1. Для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(x))$ в задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} H_u(\theta, x) dx = 0 \quad \text{для всех } \theta \in [t_0, t_1], \quad (4.3)$$

$$M_v(\xi) = 0 \quad \text{для всех } \xi \in [x_0, x_1]. \quad (4.4)$$

Здесь и в дальнейшем $\theta \in [t_0, t_1)$, $\xi \in [x_0, x_1)$ произвольные точки непрерывности управлений $u(t)$ и $v(x)$, соответственно.

Систему соотношений (4.3), (4.4) назовем уравнением Эйлера в рассматриваемой задаче.

Уравнение Эйлера (4.3), (4.4) представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление $(u(t), v(x))$ являющееся решением уравнения Эйлера назовем классической экстремалью [4].

Используя неравенство (4.2) выведем необходимое условие оптимальности для классических экстремалей.

Решение задачи (3.2) допускает представление

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau, x) f_u(\tau, x) \delta u(\tau) d\tau + \Phi_1(t, t_0, x) \delta y(x). \quad (4.5)$$

Здесь $\Phi_1(t, \tau, x) - (n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \Phi_1(t, \tau, x)}{\partial \tau} = -\Phi_1(t, \tau, x) f_u(\tau, x),$$

$$\Phi_1(t, t, x) = E,$$

($E - (n \times n)$ единичная матрица).

Запишем представление решения задачи (3.3) по формуле Коши.

Имеем

$$\delta y(x) = \int_{x_0}^x \Phi_2(x, s) g_v(s) \delta v(s) ds, \quad (4.6)$$

где $\Phi_2(x, s) - (n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \Phi_2(x, s)}{\partial s} = -\Phi_2(x, s) g_v(s),$$

$$\Phi_2(x, x) = E.$$

С учетом (4.6) представление (4.5) записывается в виде

$$\delta z(t, x) = \int_{x_0}^x \Phi_1(t, t_0, x) \Phi_2(x, s) g_v(s) \delta v(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau, x) f_u(\tau, x) \delta u(\tau) d\tau. \quad (4.7)$$

Предположим, что $\delta u(t) \equiv 0$, $\delta v(x) \neq 0$. Тогда представление (4.7) принимает вид

$$\delta z(t, x) = \int_{x_0}^x \Phi_1(t, t_0, x) \Phi_2(x, s) g_v(s) \delta v(s) ds. \quad (4.8)$$

А из неравенства (4.2) следует, что

$$\delta y'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) dx dt - \quad (4.9)$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} [\delta y'(x) M_{yy}(x) \delta y(x) + 2 \delta v'(x) M_{vy}(x) \delta y(x) + \delta v'(x) M_{vv}(x) \delta v(x)] dx \geq 0.$$

Далее, используя представления (4.6), (4.8), по аналогии с работами [9-12], доказывается справедливость соотношений

$$\delta y'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \delta y(x_1) = \quad (4.10)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau) \Phi'_2(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \Phi_2(x_1, s) g_v(s) \delta v(s) ds d\tau,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta v'(x) M_{vy} \delta y(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_x^{x_1} \delta v'(s) M_{vy}(s) \Phi_2(s, x) ds \right] g_v(x) \delta v(x) dx, \quad (4.11)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta y'(x) M_{yy}(x) \delta y(x) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau) \left\{ \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} \Phi'_2(x, \tau) M_{yy}(x) \Phi_2(x, s) dx \right\} g_v(s) \delta v(s) ds d\tau, \quad (4.12)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau) \times$$

$$\times \left\{ \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} \Phi'_2(x, \tau) \Phi'_1(t_1, t_0, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Phi_2(x, s) \Phi_1(t_1, t_0, x) dx \right\} \times \quad (4.13)$$

$$\times g_v(s) \delta v(s) ds d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) dx dt = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau) \times \quad (4.14)$$

$$\times \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} \Phi'_2(x, \tau) \Phi'_1(t, t_0, x) H_{zz}(t, x) \Phi_1(t, t_0, x) \Phi_2(x, s) dt dx \right\} g_v(s) \delta v(s) ds d\tau.$$

Введем в рассмотрение матричную функцию $M(\tau, s)$ посредством формулы

$$\begin{aligned}
M(\tau, s) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} \Phi_2'(x, \tau) \Phi_1'(t, t_0, x) H_{zz}(t, x) \Phi_1(t, t_0, x) \Phi_2(x, s) dt dx - \\
& - \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} \Phi_2'(x, \tau) \Phi_1'(t_1, t_0, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Phi_2(x, s) \Phi_1(t_1, t_0, x) dx + \\
& + \Phi_2'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(y(x_1))}{\partial y^2} \Phi_2(x_1, s) + \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} \Phi_2'(x, \tau) M_{yy}(x) \Phi_2(x, s) dx.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Принимая во внимание вид матричной функции $M(\tau, s)$, неравенство (4.9) с помощью тождеств (4.10)-(4.14) представляется в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(\tau) g_v'(\tau) M(\tau, s) g_v(s) \delta v(s) ds d\tau + 2 \int_{x_0}^{x_1} \int_x^{x_1} \delta v'(s) M_{vy}(s) \Phi_2(s, x) \delta v(x) ds \Big] \times \\
& \times g_v(x) \delta v(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(x) M_{vv}(x) \delta v(x) dx \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Теперь предположим, что $\delta u(t) \neq 0$, $\delta v(x) \equiv 0$.

В этом случае $\delta y(x) \equiv 0$, а

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau, x) f_u(\tau, x) \delta u(\tau) d\tau. \tag{4.17}$$

При этом неравенство (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) + \\
& + 2 \delta u'(t) H_{uz}(t, x) \delta z(t, x) + \delta u'(t) H_{uu}(t, x) \delta u(t)] dx dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Поэтому используя представление (4.17) можно убедиться в справедливости следующих соотношений

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx = \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
= & \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) \left[\int_{x_0}^{x_1} f_u'(\tau, x) \Phi_1'(t_1, \tau, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Phi_1(t_1, s, x) f_u(s, x) dx \right] \delta u(s) ds d\tau, \\
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \delta z(t, x) dx dt =
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau, x) f_u(\tau, x) \delta u(\tau) d\tau \right)' H_{zz}(t, x) \left(\int_{t_0}^t \Phi_1(t, s, x) f_u(s, x) \delta u(s) ds \right) dx dt = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) \left\{ \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} f_u'(\tau, x) \Phi_1'(t, \tau, x) H_{zz}(t, x) \Phi_1(t, s, x) f_u(s, x) dt \right\} \delta u(s) ds d\tau dx = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} f_u'(\tau, x) \Phi_1'(t, \tau, x) H_{zz}(t, x) \Phi_1(t, s, x) f_u(s, x) dx dt \right\} \delta u(s) ds d\tau, \\
&\quad \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t) H_{uz}(t, x) \delta z(t, x) dx dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} \delta u'(\tau) H_{uz}(\tau, x) \Phi_1(\tau, t, x) f_u(t, x) \delta u(t) d\tau \right] dx dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} \delta u'(\tau) H_{uz}(\tau, x) \Phi_1(\tau, t, x) d\tau \right] f_u(t, x) \delta u(t) dx dt. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
K(\tau, s, x) &= -\Phi_1'(t_1, \tau, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Phi_1(t_1, s, x) + \\
&\quad + \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} \Phi_1'(t, \tau, x) H_{zz}(t, x) \Phi_1(t, s, x) dt.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом тождеств (4.19)-(4.21) из (4.18) будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(\tau) f_u'(\tau, x) K(\tau, s, x) f_u(s, x) \delta u(s) ds dt dx + \\
&+ 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} \delta u'(\tau) H_{uz}(\tau, x) \Phi_1(\tau, t, x) d\tau \right] f_u(t, x) \delta u(t) dt dx + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t) H_{uu}(t, x) \delta u(t) dx dt \leq 0. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Теорема 4.2. Для оптимальности классической экстремали $(u(t), v(x))$ необходимо, чтобы неравенства (4.11), (4.16) выполнялись соответственно, для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$ и $\delta v(x) \in R^q$, $x \in X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журн. Вычисл. Мат. и мат. физики. 1969, № 1, с. 68-95.
2. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Томск, 1971, 21 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
5. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975, 764 с.
6. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа. 2005, 335 с.
7. Mənsimov K.B. Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələləri. Bakı, 1998, 114 s.
8. Мордухович Б.Ш. Методы метрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1987, 360 с.
9. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 174 с.
10. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 363 с.
11. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса-Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1981, № 2, с. 100-104.
12. Марданов Т.К., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013, 353 с.

BİR SPESİFİK OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

K.B. MƏNSİMOV, Ş.M. RƏSULOVA

XÜLASƏ

İşdə parametrdən asılı adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir spesifik optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Parametrdən asılı başlanğıc şərt özü də idarə daxil olan diferensial tənliyin həllidir. Baxılan məsələdə ikinci tərtib optimallıq şərtləri alınmışdır.

Açar sözlər: paylanmış parametrlı sistem, optimallıq üçün zəruri şərt, funksionalın birinci və ikinci variasiyası, Eylər tənliyi.

ON ONE SPECIAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM

K.B.MANSIMOV, Sh.M.RASULOVA

SUMMARY

The paper deals with an optimal control problem described by a system of parameter dependent ordinary differential equations. The parameter dependent initial condition itself is the solution to the differential equation contained in the control. In the problem the second order optimality conditions are obtained.

Key words: distributed parameter systems, necessary optimality condition, first and second order variations of the functional, Euler equation.

Поступило в редакцию: 20.02.2014 г.

Подписано к печати: 04.04.2014 г.